数理解析研究所講究録 1438 巻 2005 年 50-65

Decomposition of Green polynomials of type A and DeConcini-Procesi-Tanisaki algebras of certain types

森田英章 (東海大学理学部)・中島達洋 (明海大学経済学部)

1 導入〜余不変式環の場合

W を有限鏡映群, $R=\bigoplus_d R^d$ をその自然な有限次元次数表現とする. 表現は特に断られない限り複素数体 $\mathbf{C}$ 上で考えることにする. 例えば余不変式環などを念頭においていただきたい. このとき, ある自然数 l に対して, l を法として互いに合同な次数をもつ R の斉次空間の直和

$$R(k;l):=\bigoplus_{d\equiv k \bmod l} R^d, \quad k=0,1,\ldots,l-1$$

を考えると, これらの次元が k によらず一定になることがよくおこる. この現象のことを今後簡単に「次元の一致」とよぶことにする. この次元の一致が, どのような次数表現に対して起きるのか, いつ起きるのか, そしてそれが何を意味するのかは今のところ全くわからない. ただ現在のところ, 有限鏡映群に自然に附随する有限次元次数表現を考えれば, (我々の手に負える範囲のものに対しては) 概ねこの現象を持つことが確認されている. 例えば冒頭にでてきた「余不変式環」はその代表的な例である. W を有限鏡映群とし, $W\subset GL(V)$ $(\dim V=n)$ をその鏡映表現とする. このとき W は多項式環 $S(V^*)$ に自然に作用しており, その不変式環 $S(V^*)^W$ を考えれば, これが n 変数の多項式環になることはよく知られている事実である. その際, $S(V^*)^W$ の代数独立かつ斉次な生成元 $f_1,f_2,\ldots,f_n$ を W の「基本不変式」とよび, それらの次数 $d_1=\deg f_1, d_2=\deg f_2,\ldots,d_n=\deg f_n$ をその「基本次数」とよんでいる. 一般に基本不変式の取りかたは一意的ではないが, それらの次数のなす集合は一意的に定まることが知られている. 有限鏡映群 W の余不変式環 S_W とは, 多項式環 $S(V^*)$ を基本不変式で生成されるイデアル $I_W:=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ で割って得られる商環

$$S_W=S(V^*)/I_W$$

のことをいう. その構成から余不変式環は W の次数表現, すなわち S_W は斉次空間分解

$$S_W=\bigoplus_d S_W^d$$

をもち, S_W 自体のみならず各斉次空間 S_W^d も W-加群の構造をもつことがわかる. また, S_W は W の左正則表現 $\mathbf{C}[W]$ と同型であり, 特に W が crystallographic の場合には, 対応する

旗多様体のコホモロジー環と同型になることも知られている．有限鏡映群の余不変式環は，W の基本次数（およびその約数）に対して次元の一致を持つことが，以下のようにしてわかる．まず，一般に次の事実が成立することに注意する[1]．

Lemma 1 $f(q)=a_0+a_1q+a_2q^2+\cdots$ を（少なくとも標数 0 の体上の）多項式とする．このときある正整数 l に対して

$$c(k;l):=\sum_{d\equiv k \bmod l} a_d, \quad k=0,1,\ldots,l-1$$

とおく．このとき $c(k;l)$ が k によらず一定であることと，$f(q)$ が ζ_l^j $(j=1,2,\ldots,l-1)$ をそのゼロ点にもつこととが同値である．ただし，ζ_l は 1 の原始 l 乗根． □

この補題により，我々はある有限次元次数付代数 $R=\bigoplus_d R^d$ に対し，その次元の一致の状況を調べようと思えば，R の Hilbert 多項式

$$\mathrm{Hilb}_R(q):=\sum_d q^d \dim R^d$$

のゼロ点の状況を調べればよいことがわかる．すなわち，いかなる正整数 l に対し ζ_l^j $(j=1,2,\ldots,l-1)$ が $\mathrm{Hilb}_R(q)$ のゼロ点になっているかをみればよいことになる．そして有限鏡映群の余不変式環の Hilbert 多項式は，次のように基本次数を用いて表されることが知られている [H, 3.15]．

Proposition 2 W を有限鏡映群とし，$S_W=\bigoplus_d S_W^d$ をその余不変式環，$d_1,d_2,\ldots,d_n$ は W の基本次数とする．このとき，S_W の Hilbert 多項式は

$$\mathrm{Hilb}_{S_W}(q)=\prod_{i-1}^{d}\frac{1-q^{d_i}}{1-q}$$

で与えられる． □

従って標数 0 の体上では，有限鏡映群の余不変式環の次元の一致は，基本次数（およびその約数）に対し生じることがわかる．

我々はここで次の問題を考えることにしたい．W を有限鏡映群，$R=\bigoplus R^d$ をその有限次元次数表現とする．いま，R には正整数 l に対し次元の一致が生じている，すなわち部分加群 $R(k;l)$ $(k=0,1,\ldots,l-1)$ の次元がすべて一致していると仮定する．このとき：

W の部分群 $H(l)$，および次元が互いに相等しい $H(l)$-加群 $Z(k;l)$ で

$$R(k;l)\cong_W \mathrm{Ind}_{H(l)}^W Z(k;l), \quad k=0,1,\ldots,l-1$$

を満たすものを構成せよ．

[1]これは大島利雄氏による

すなわち, 次元の一致に対してその「表現論的解釈」を与えよ, という問題である.

この問に最初に答えを与えたのは Kraśkiewicz-Weyman [KW] である[2]. 彼らは A, B, D 型の Weyl 群 W の余不変式環 S_W に対して, l が「Coxeter 数」[3] の場合にその表現論的解釈を与えている. この場合, W の Coxeter element c で生成される巡回部分群は, 長さ l の巡回群 C_l になるが, その既約表現

$$\varphi_l^{(k)} : C_l \longrightarrow \mathbf{C}^\times : c \longmapsto \zeta_l^k$$

$(k = 0, 1, \ldots, l-1)$ を考えれば, これらが

$$S_W(k; l) \cong_W \operatorname{Ind}_{C_l}^W \varphi_l^{(k)}, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1$$

を満たすことが示される. その後, 同様の結果がより一般の場合に対して Stembridge [St] によって得られている. 彼の結果は, W を一般の有限複素鏡映群としたとき, その余不変式環の W の「正則数」に関する次元の一致の表現論的解釈を与えるもので, この場合も下の部分群は巡回群となり, その表現は既約表現でことたりる. また最近になって, Bonnafé や Reiner-Stanton-Webb らによって, 複素鏡映群あるいは一般の体上の鏡映群の余不変式環に対しても, さらに一般的な結果が得られているが, これについては後に述べる.

以上は, 考える次数表現を余不変式環に固定し, 鏡映群を一般化する方向の話であるが, この問題にはもう一方の一般化が考えられる. すなわち, 鏡映群を固定し次数表現を一般化していく方向である. 現在我々は, 鏡映群は対称群に固定し, その次数表現を一般化する方向で, 次元の一致の表現論的解釈を進めている. 元となるのは余不変式環である. しかし対称群に対しては, 余不変式環を含み, 余不変式環と同様に旗多様体の幾何を背景とする自然な次数表現の族が知られている. これがこの稿で我々がいうところの「DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数」[DP][T][GP] である. DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数は, n の分割 μ に対して定義される n 次対称群 S_n の有限次元次数表現である. 本稿ではそれを

$$R_\mu = \bigoplus_d R_\mu^d$$

で表すことにする. 対称群 S_n の余不変式環 R_n は, $\mu = (1^n)$ の場合に相当している. 先にも述べたように, 余不変式環は対称群の基本次数 $l = (1,)2, 3, \ldots, n$ に対して次元の一致を持ち, $l = n$ (Coxeter 数) の場合には Kraśkiewicz-Weyman が, そして一般の基本次数 (及びその約数) の場合には我々 [MN1, Theorem 8] が, その表現論的解釈を与えている. 同様に R_μ も次元の一致を持つことが示されるのであるが, 一般の R_μ の場合は, 全ての基本次数に対して次元の一致が起きるわけではない. この場合, 各 $\mu \vdash n$ に対してある正整数 $M_\mu (\leq n)$ が定まり, $l = (1,)2, 3, \ldots, M_\mu$ に対して次元の一致が生じることが示される. 本稿での我々の目的は, μ が hook, すなわち $\mu = (n-h, 1^h)$ $(n-h > 1)$ の場合, および μ が rectangle, すなわち $\mu = (r^p)$ の場合に, R_μ の次元の一致の表現論的解釈を与えることである.

[2]本質的には Springer [Sp] によってすでに知られていた.

[3]Coxeter 数は基本次数の特別な場合である.

2 DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数

S_n は n 次対称群とする. また P_n により複素数係数の n 変数の多項式環 $\mathbf{C}[x_1, \ldots, x_n]$ を表すことにする. このとき S_n は P_n に以下のように変数の入れ替えとして作用する : $\sigma \in S_n$ および $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ に対して

$$(\sigma f)(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}).$$

さて, n の分割 μ (以下これを表すのに $\mu \vdash n$ を用いる) に対して, P_n の斉次イデアル I_μ を以下のように構成する. $\mu' = (\mu_1', \mu_2', \ldots)$ は μ の共役とする. このとき, I_μ の生成系は

$$I_\mu = \left\langle e_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}) \middle| \begin{array}{l} k = 1, \ldots, \mu_1, \\ n-k+1 \geq m \geq n-k+1-(\mu_k' + \mu_{k+1}' + \cdots + \mu_{\mu_1}' + 1) \end{array} \right\rangle$$

で与えられる. ただし $e_m(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}})$ は $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-k+1}}$ を変数とする m 次の基本対称式を表している. 例えば, $\mu = (2,1) \vdash 3$ とすれば, I_μ の生成系は

$$\begin{array}{l} e_3(x_1, x_2, x_3), e_2(x_1, x_2, x_3), e_1(x_1, x_2, x_3), \\ e_2(x_1, x_2), e_2(x_1, x_3), e_2(x_2, x_3) \end{array}$$

で与えられる. そして, n の分割 μ に附随する DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 R_μ は, 商環

$$R_\mu := P_n / I_\mu$$

として定義される [DP] [GP] [T].

さて, 定義よりすぐわかるように, R_μ は次数 S_n-加群となる. 以下, その斉次空間分解を

$$R_\mu = \bigoplus_{d \geq 0} R_\mu^d$$

と表すことにする. 導入でも述べたように, 我々の第一の問題は, いかなる正整数 l を法としてこれらの斉次空間の直和をとれば, それらの次元が一定になりうるかということである. すなわち, Lemma 1 の観点に立てば, どのような正整数 l に対して ζ_l^j $(j = 1, 2, \ldots, l-1)$ が R_μ の Hilbert 級数 (多項式)

$$\mathrm{Hilb}_{R_\mu}(q) := \sum_{d \geq 0} q^d \dim R_\mu^d$$

のゼロ点を与えるかを調べることになる. 我々は, この問題を R_μ の次数指標を用いて, より一般的な枠組みで考えることにしたい.

まず, 先程も述べたように, DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 R_μ は次数 S_n-加群である. そこでその「次数指標」 $\mathrm{char}_q R_\mu$ を

$$\mathrm{char}_q R_\mu := \sum_{d \geq 0} q^d \mathrm{char} R_\mu^d$$

で定義する．ただし, $\mathrm{char}R_\mu^d$ は R_μ の部分 S_n-加群 R_μ^d の指標である．この次数指標の単位元 e での値をとれば, $\mathrm{char}R_\mu^d(e) = \dim R_\mu^d$ であるから,

$$\mathrm{Hilb}_{R_\mu}(q) = \mathrm{char}_q R_\mu(e)$$

を得ることに注意する．実はこの R_μ の次数指標は, 「(A 型の) Green 多項式」と一致することが知られている．(A 型) Green 多項式 $Q_\rho^\mu(q)$ [Gr] [Mc] とは, ρ を n の分割としたとき, 冪和対称函数 $p_\rho(x)$ を Hall-Littlewood 対称函数 $P_\mu(x;t)$ で展開して

$$p_\rho(x) = \sum_{\mu\vdash n} X_\rho^\mu(t) P_\mu(x;t)$$

としたとき, これらの係数 $X_\rho^\mu(t)$ を

$$Q_\rho^\mu(q) = q^{n(\mu)} X_\rho^\mu(q^{-1})$$

により modify して得られる整数係数の多項式である．ただし, ここで $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots)$ に対して, $n(\mu) = \sum_{i\geq 1}(i-1)\mu_i$ と定義する．現在, Green 多項式は様々なタイプのものが考えられているが [S1] [S2], 本稿では単に Green 多項式といえば全てこの A 型のものを指すこととする．

さて, Green 多項式に関してはこの定義の他に, "Kostka 多項式" を用いた記述が知られている．(Kostka 多項式の定義に関しては [Mc, I, Section 6] 参照.) いま, Kostka 多項式を $K_{\lambda\mu}(q)$ $(\lambda, \mu \vdash n)$ で表し, それを modify したものを

$$\tilde{K}_{\lambda\mu}(q) = q^{n(\mu)} K_{\lambda\mu}(q^{-1})$$

であらわせば,

$$Q_\rho^\mu(q) = \sum_{\lambda\vdash n} \chi_\rho^\lambda \tilde{K}_{\lambda\mu}(q)$$

となることが知られている (e.g., [Mc, (7.11)])．ただし χ_ρ^λ は, S_n の既約指標 χ^λ の cycle type が ρ の共役類での値を表している．そして, この "modified"Kostka 多項式 $\tilde{K}_{\lambda\mu}(q)$ は, DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 R_μ における, S_n の既約表現 V^λ の Poincaré 多項式 に一致, すなわち

$$\tilde{K}_{\lambda\mu}(q) = \sum_{\lambda\vdash n} [R_\mu^d : V^\lambda] q^d$$

となることが知られているので (see e.g., [GP, (I, 8)]), Green 多項式 $Q_\rho^\mu(q)$ は DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 R_μ の次数指標 $\mathrm{char}_q R_\mu$ の cycle type ρ を持つ共役類での値 $\mathrm{char}_q R_\mu(\rho)$ を与えていることがわかる：

$$Q_\rho^\mu(q) = \mathrm{char}_q R_\mu(\rho).$$

我々のここでの目標は, Green 多項式 $Q_{(1^n)}^\mu(q) (= \mathrm{Hilb}_{R_\mu}(q))$ のゼロ点をあぶり出していくことである．そこで, Green 多項式 $Q_\rho^\mu(q)$ の具体形をできる限り詳しく知りたいのであるが, 現在我々が手にしているのは以下に挙げる場合に限られている．まず, 頻出する記号をまず定めておく．

Definition 3 分割 $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}) \vdash n$ に対して

$$e_\lambda(q) := (1-q)^{m_1}(1-q^2)^{m_2}\cdots(1-q^n)^{m_n},$$
$$b_\lambda(q) := \textstyle\prod_{i\geq 1}(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^{m_i}).$$

□

例えば, $(1-q)\cdots(1-q^{M_\mu})$ は $b_{(1^{M_\mu})}(q)$ と表されること, 及び $\lambda = \mu \cup \nu$ の場合には $e_\lambda = e_\mu e_\nu$ となることに注意する. また, 通常通り $\lambda = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}) \vdash n$ に対して, 通常と同様に

$$z_\lambda = 1^{m_1}m_1!2^{m_2}m_2!\cdots n^{m_n}m_n!$$

とおく.

さて, 先述のように幾つかの特別な場合には, $Q^\mu_\rho(q)$ の具体的な形が知られている. 例えば, 余不変式環に対応する $\mu = (1^n)$ の場合は次のようになる (see e.g., [G, Proposition 8.1]).

Proposition 4 $\rho \vdash n$ に対して

$$\mathrm{char}_q R_n(q) = Q^{(1^n)}_\rho(q) = \frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)}{e_\rho(q)}.$$

□

また, μ が第一成分が 2 の鉤型 (hook) の場合, すなわち $\mu = (2, 1^{n-2}) \vdash n$ の場合の公式は, A. Morris [Mr, Lemma 3] によって得られている.

Proposition 5 (Morris) $\rho = (1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n})$ のとき,

$$Q^{(2,1^{n-2})}_\rho(q) = \frac{(1-q)\cdots(1-q^{n-2})}{e_\rho(q)}\{(r_1-1)q^n - r_1 q^{n-1} + 1\}.$$

□

また, 一般の hook に対しては, 次を示すことができた [Mt, Theorem 5].

Proposition 6 $\mu = (n-h, 1^h) \vdash n$ とする. このとき $\rho = (1^{r_1}2^{r_2}\cdots n^{r_n})$ に対して,

$$Q^\mu_\rho(q) = \frac{(1-q)\cdots(1-q^h)}{e_\rho(q)}G^\mu_\rho(q)$$

ただし

$$G^\mu_\rho(q) = (1-q^n) - \sum_{k=1}^{n-h-1}\sum_{\tau=(1^{t_1}\cdots k^{t_k})\vdash k}\binom{r_1}{t_1}\cdots\binom{r_k}{t_k}q^{n-k}e_\tau(q).$$

□

以上の例いずれにおいても, Green 多項式 $Q^{\mu}_{\rho}(q)$ から

$$\frac{(1-q)\cdots(1-q^{M_\mu})}{e_\rho(q)}$$

をくくり出すと, あとには多項式が残る構えになっている. そして Hilbert 多項式 $Q^{\mu}_{(1^n)}(q)$ においては, この部分をみればひとまずどのような 1 の冪根 ζ_l^j がそのゼロ点になっているかを見て取ることができる. すなわち, 具体的には $Q^{\mu}_{(1^n)}(q)$ が次の形の因子

$$\frac{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^m)}{(1-q)^n}$$

をどのように含むかをいうことを問題とすれば, 我々の当面の目標は達せられることになる. そのことを述べた次の定理は, 我々の議論において決定的な役割を果たす.

Theorem 7 μ, ρ はそれぞれ n の分割とする. このとき, 整数係数の多項式 $G^{\mu}_{\rho}(q) \in \mathbf{Z}[q]$ が存在し,

$$Q^{\mu}_{\rho}(q) = \frac{b_{(1^{M_\mu})}(q)}{e_\rho(q)} G^{\mu}_{\rho}(q)$$

が成立する. □

このことと Lemme 1 を合わせると次が従う.

Corollary 8 μ は n の分割とする. このとき, $l \in \{2, \ldots, M_\mu\}$ を任意に一つ固定すると, 各 $k = 0, 1, \ldots, l-1$ に対して, ζ_l^k は $Q^{\mu}_{(1^n)}(q)$ の零点である. 従って, $R_\mu(k;l)$ の次元は k によらず一定である. □

以上より, 分割 $\mu \vdash n$ に対して, 整数 $l \in \{1, 2, \ldots, M_\mu\}$ を任意に固定すると, $R_\mu(k;l)$ の次元は k によらず一定であることがわかった. 次節以降では, ある特別な場合に対して, 余不変式環に対してしたのと同様に, 表現論的な解釈を求めていくことにする.

3 hook の場合

ここでは, n の分割 μ が特に hook の場合に対し, DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 R_μ を考え, その斉次空間の直和

$$R_\mu(k;l) = \bigoplus_{d \equiv \bmod l} R^d_\mu, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1$$

に関して, 余不変式環に対してしたのと同様の問題を考えたい. すなわち, まずどのような l の値に対して, $R_\mu(k;l)$ の次元が k によらず一定になるか, そしてそのような場合, l に対し

て S_n の部分群 $H_\mu(l)$ が存在し, $R_\mu(k;l)$ たちはこの $H_\mu(l)$ の表現からそれぞれ誘導されうるか, という問題である.

$\mu=(n-h,1^h)\vdash n$ を hook とする. このとき, $n-h=1$ であれば R_μ は余不変式環になるので, 以下では $n-h>1$ を仮定する. すると $M_\mu=h$ となるから, $l=1,2,\ldots h$ に対して, $\mathrm{char}_q R_\mu(\rho)=Q^\mu_\rho(q)$ は, Theorem 7 (あるいは Proposition 6) により $\zeta_l^k (k=0,1,\ldots,l-1)$ をその零点に持つ. 従って Lemma 1 より, これらの $l=1,2,\ldots h$ に対しては, $R_\mu(k;l)$ の次元は k によらずに一定になることがわかる. ただし, $l=1$ の場合は自明なので除外して考える. すなわち, 我々は以下

$$\mu=(n-h,1^h),\ n-h>1,\ l=2,3,\ldots,h$$

の場合に対して, 件の問題を考えていくこととする. また, $\bar{\mu}=(n-h,1^r)$, $\nu=(1^{dl})$ とおく.

その結論から先にいえば, 余不変式環の場合と同様の結論を得ることが可能であり, 詳しくは次のようになる. まず, $h=dl+r$, $0\le r\le l-1$ としておく. このとき $a\in S_n$ は巡回置換の積

$$a=(1,2,\ldots,l)(l+1,l+2,\ldots,2l)\cdots((d-1)l+1,(d-1)l+2,\ldots,dl)$$

とし, C_l で a で生成される S_n の部分群を表す：

$$C_l:=\langle a\rangle.$$

また, S_{n-dl} で S_n の $\{1,2,\ldots,dl\}$ の固定部分群を表す：

$$S_{n-dl}:=\{\sigma\in S_n|\sigma(i)=i\quad \text{for } i=1,2,\ldots,dl\}.$$

また, これら二つの部分群の直積を $H_\mu(l)$ とおく：

$$H_\mu(l):=C_l\times S_{n-dl}.$$

ここで, $k=0,1,\ldots,l-1$ に対して, $H_\mu(l)$ の表現 $Z_\mu(k;l)$ を次のように定義する：

$$Z_\mu(k;l):=\bigoplus_{d\equiv k \bmod l}\varphi_l^{(k-d)}\otimes R^d_{\bar{\mu}}.$$

ただし, $\varphi_l^{(s)}$ は巡回群 $C_l=\langle a\rangle$ の既約表現 $a\mapsto\zeta_l^s$ である. $H_\mu(l)$-加群 $Z_\mu(k;l)$ は $R_{\bar{\mu}}$ の各斉次空間 $R^d_{\bar{\mu}}$ を 1 次表現 $\varphi_l^{(k-d)}$ でひねっただけであるから, これらの次元は全て $R_{\bar{\mu}}$ のそれに等しい. ここでの我々の主張は, S_n-加群の同型

$$R_\mu(k;l)\cong \mathrm{Ind}^{S_n}_{H_\mu(l)}Z_\mu(k;l)$$

をいうものであるが, これをいうのに我々は次の同値な命題を示すことにする.

その同値な命題は, R_μ と $\mathrm{Ind}_{S_{n-dl}}^{S_n} R_{\bar{\mu}}$ が $S_n \times C_l$-加群の同型をいうものである. まず R_μ を次のように $S_n \times C_l$-加群と思う. S_n の作用は通常のものを考えるが, C_l-加群の構造は次のように入れる：

$$a.x = \zeta_l^d x \quad \text{if } x \in R_\mu^d.$$

また, 誘導表現 $\mathrm{Ind}_{S_{n-dl}}^{S_n} R_{\bar{\mu}} = \bigoplus_{\sigma \in S_n/S_{n-dl}} \sigma \otimes R_{\bar{\mu}}$ には C_l の作用を

$$a.(\sigma \otimes x) = \sigma a^{-1} \otimes ax = \zeta_l^d \sigma a^{-1} \otimes x \quad \text{if } x \in R_{\bar{\mu}}^d$$

で定めることにより $S_n \times C_l$-加群と思う.

Theorem 9 $\mu = (n-h, 1^h) \vdash n$ $(n-h>1)$ は hook とする. また $l \in \{2,3,\ldots,h\}$ に対して $n = dl + r$ $(0 \le r \le l-1)$ のとき, $\bar{\mu} = (n-h, 1^r)$ とおく. このとき, $S_n \times C_l$-加群の同型

$$R_\mu \cong \mathrm{Ind}_{S_{n-dl}}^{S_n} R_{\bar{\mu}}$$

が存在する. □

まず, この定理と我々の同型

$$R_\mu(k;l) \cong_{S_n} \mathrm{Ind}_{H_\mu(l)}^{S_n} Z_\mu(k;l), \quad k = 0,1,\ldots,l-1$$

の存在が同値であることをみておく. $S_n \times C_l$-加群の同型 $R_\mu \cong \mathrm{Ind}_{S_{n-dl}}^{S_n} R_{\bar{\mu}}$ を仮定する. 左辺において C_l の生成元 a の固有値 ζ_l^k の固有空間は $R_\mu(k;l)$ である. 一方, 右辺は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ind}_{S_{n-dl}}^{S_n} R_{\bar{\mu}} &= \bigoplus_{\sigma \in S_n/S_{n-dl}} \sigma \otimes R_{\bar{\mu}} \\
&= \bigoplus_{d \ge 0} \bigoplus_{w \in S_n/C_l \times S_{n-dl}} \bigoplus_{j=0}^{l-1} wa^j \otimes R_{\bar{\mu}}^d \\
&= \bigoplus_{d \ge 0} \bigoplus_{w \in S_n/C_l \times S_{n-dl}} \bigoplus_{s=0}^{l-1} wb_s \otimes R_{\bar{\mu}}^d
\end{aligned}$$

である. ただし各 $s = 0,1,\ldots,l-1$ に対して $b_s = 1 + (\zeta_l^s)a + (\zeta_l^{2s})a^2 + \cdots + (\zeta_l^{(l-1)s})a^{l-1}$ とおいている. ここで, $b_s a^{-1} = \zeta_l^s b_s$ に注意すれば, $\mathrm{Ind}_{S_{n-dl}}^{S_n} R_{\bar{\mu}}$ での a の固有値 ζ_l^k の固有空間は

$$\bigoplus_{\substack{d,s \\ d+s \equiv k \bmod l}} b_s \otimes R_{\bar{\mu}}^d$$

であることがわかる. このとき, $\mathbf{C}b_k \cong_{C_l} \psi^{(k)}$ より主張を得る. もう一方の証明はこの証明を逆にたどればよい.

この節の最後に, Theorem 9 の証明の概略を述べる. 基本的には双方の指標値が一致することをみる. すなわち, 各 $(w, a^j) \in S_n \times C_l$ に対して

$$\mathrm{char} R_\mu(w, a^j) = \mathrm{char\ Ind}_{S_r}^{S_n} R_{\bar{\mu}}(w, a^j)$$

であることを示す[4]. この左辺は R_μ の次数指標 $\mathrm{char}_q R_\mu(w)$ の $q = \zeta_l^j$ における特殊値として, すなわち Green 多項式 $Q_{\lambda(w)}^\mu(q)$ の $q = \zeta_l^j$ における値と一致することに注意する. ただし, ここで $\lambda(w)$ は $w \in S_n$ の cycle type である. また, 直接計算することにより,

$$\mathrm{char\ Ind}_{S_r}^{S_n} R_{\bar{\mu}}(w, a^j) \neq 0 \Longrightarrow w = a^j \tau \in H_\mu(l), \quad \tau \in S_r$$

であることが示される. さらに $w = a^j\tau$ に対して

$$\mathrm{char\ Ind}_{S_r}^{S_n} R_{\bar{\mu}}(w, a^j) = \binom{e + r_p}{e} p^e e!\ \mathrm{char} R_{\bar{\mu}}(\tau),$$

ただし (p^e) は a^j の cycle type, r_p は $\lambda(\tau)$ における p の重複度を表す.

一方, Theorem 7 を用いると Green 多項式 $Q_\rho^\mu(q)$ に対しても, 次のことを示すことができる. 記号は上に準ずる.

- [5] $Q_\rho^\mu(\zeta_l^j) \neq 0 \Longrightarrow \rho = \lambda(a^j\tau), \quad a^j\tau \in H_\mu(l)$,
- $Q_{\lambda(a^j\tau)}^\mu(\zeta_l^j) = \binom{e + r_p}{e} p^e e! Q_{\lambda(\tau)}^{\bar{\mu}}(\zeta_l^j)$.

この節冒頭に述べたことにより $Q_{\lambda(\tau)}^{\bar{\mu}}(\zeta_l^j) = \mathrm{char} R_{\bar{\mu}}(\tau)|_{q=\zeta_l^j}$ を得るので, Theorem 9 の証明を終える.

4 rectangle の場合

この節では, μ が rectangle の場合に, R_μ の次元の一致の表現論的解釈を与える. ただし, μ としてはその重複度が素数の場合, すなわち $\mu = (r^p)$, p は素数, の場合のみを考える. また, 次元の一致を与える自然数 l としては, $l = p$ の場合のみを考えることにする[6].

$\mu = (r^p)$ を重複度が素数の rectangle とする. $n = rp$ とおこう. このとき DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 R_μ は, 次数付 S_n-加群をあたえ, $l = p$ に対して次元が一致している. すなわち

$$R_\mu(k; p) = \bigoplus_{d \equiv k \bmod p} R_\mu^d, \quad k = 0, 1, \ldots, l-1$$

[4] $j = 0$ の場合は DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数の基本的な性質がから既に成立していることがわかる. したがって, 実際には $j > 0$ の場合に示せば充分であることに注意する.

[5] この部分の証明には, modified Hall Littlewood 関数を用いた Lascoux-Leclerc-Thibon [LLT] の手法を用いる.

[6] 現在では一般の重複度 $\mu = (r^m)$, および l は m およびその約数に対して, 次元の一致の表現論的解釈を得ている.

の次元は k によらず一定である. 問題をくり返せば, 以下のようになる：

S_n の部分群 $H_\mu(p)$, および次元が互いに相等しい $H_\mu(p)$-加群 $Z_\mu(k;p)$ で

$$R_\mu(k;p) \cong_{S_n} \mathrm{Ind}_{H_\mu(p)}^{S_n} Z_\mu(k;p), \quad k = 0, 1, \ldots p-1$$

をみたすものを構成せよ.

部分群の構成は一般の場合に記述すると冗長を避けないので, 実例を用いて述べることにする.

Example 10 (H_μ および Z_μ の定義) $\mu = (2,2,2)$ の場合を考える. このとき $p = 3$ に対して

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

と定義すると, a で生成される部分群は長さ 3 の巡回群 C_3 に同型になる. また, S_μ は μ に附随する Young 部分群とする. すなわち, $S_\mu = S_{\{1,2\}} \times S_{\{3,4\}} \times S_{\{5,6\}}$. ただし, $S_{\{i,j,\ldots,k\}}$ は文字 $\{i, j, \ldots, k\}$ の対称群. このとき

$$H_\mu(3) := S_\mu \rtimes \langle a \rangle \cong \left(S_2^{\times 3}\right) \rtimes C_3$$

と定義する. 一方, 次元が互いに相等しい $H_\mu(3)$-加群 $Z_\mu(k:3)$ としては, $C_3 = \langle a \rangle$ の各既約表現 $\varphi_3^{(k)}$ $(k = 0,1,2)$ を $H_\mu(3)$ に自明に拡張したものを考える. すなわち, $k = 0,1,2$ に対して

$$\tilde{\varphi}_3^{(k)} : H_\mu(3) \longrightarrow \mathbf{C}^\times : \begin{cases} a \longmapsto \zeta_3^k, \\ \tau \longmapsto 1, \quad \tau \in S_\mu. \end{cases}$$

□

以上のように構成した $H_\mu(p)$ および $Z_\mu(k;p)$ $(k = 0, 1, \ldots, p-1)$ に対して, 我々は以下を得る：

Theorem 11 素数重複度の rectangle $\mu = (r^p)$ を考える. $n = rp$ とおく. このとき DeConcini-Procesi-Tanisaki 代数 R_μ は, $l = p$ に対して次元の一致をもち, 各 $k = 0, 1, \ldots, p-1$ に対して

$$R_\mu(k;p) \cong_{S_n} \mathrm{Ind}_{H_\mu(p)}^{S_n} Z_\mu(k;p)$$

を得る. □

以下, 証明に関して簡単に触れることにしたい. まず, hook の場合と同様の議論により, この定理は次の $S_n \times C_p$-同型を示すことと同値になることに注意する.

Theorem 12 $R_\mu \cong_{S_n\times C_p} \mathrm{Ind}_{S_\mu}^{S_n}1$, ただし 1 は S_μ の自明な表現. □

ここで, R_μ および $\mathrm{Ind}_{S_\mu}^{S_n}1 = \bigoplus_{\sigma\in S_n/S_\mu}\sigma\otimes\mathbf{C}$ の $S_n\times C_p$-加群の構造は, 先の節と全く同様に定義する.

Therorem 12 の証明も, 両辺の指標の一致をみる. すなわち各 $(w,a^j)\in S_n\times C_p$, $j>0$ に対して

$$\mathrm{char}R_\mu(w,a^j) = \mathrm{char}\ \mathrm{Ind}_{S_\mu}^{S_n}1(w,a^j)$$

を示すのであるが, この左辺は先と同様に Green 多項式 の特殊値 $Q^\mu_{\lambda(w)}(\zeta_p^j)$ に一致していることに注意する. また p は素数なので $j=1$ の場合のみを調べれば充分である. 以上と右辺の値の解析とあわせて, 次の命題が示せればよいことがわかる.

Proposition 13 $w\in S_n$ に対し

- $Q^\mu_{\lambda(w)}(\zeta_p^j)\neq 0 \Longrightarrow w=\tau a^j\in H_\mu(p)$,
- $w=\tau a^j\in H_\mu(p)$ に対し $Q^\mu_{\lambda(w)}(\zeta_p^j)=p^{l(\lambda(w))}$.

□

Example 14 Morris [Mr] の表によれば, $\mu=(2,2,2)$ の場合, $Q^\mu_\rho(\zeta_3)\neq 0$ を満たす ρ は $(3,3)$ および (6) のみであり[7], これは $H_\mu(3)$ の元の cycle type を与えている. 逆に $H_\mu(3)$ の元の cycle type はこれらに限られる. そしてこのとき, Green 多項式の具体形は以下で与えられる：

- $Q^{(2,2,2)}_{(3,3)}(q)=(1-q)(1-q^2)(1+2q^3)$,
- $Q^{(2,2,2)}_{(6)}(q)=(1-q)(1-q^2)$.

そして簡単な計算により, $Q^{(2,2,2)}_\rho(\zeta_3)=3^{l(\rho)}$ が $\rho=(3,3),(6)$ に対し確認できる. □

Proposition 13 は, Lacoux-Leclerc-Thibon による Green 多項式 $X_\rho^{(r^m)}(q)$ に関する次の公式 [LLT, Theorem 3.2] より直接従う.

Proposition 15 (Lascoux-Leclerc-Thibon) $\mu=(r^m)$ を rectangle とする. ここでは特に m は素数とは限らない. このとき

$$X^\mu_\rho(\zeta_m)=\begin{cases}(-1)^{(m-1)j}mX^{((r-j)^m)}_{\rho-\{i\}}(\zeta_m), & \text{if } i=jm\in\rho,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

この Lascoux-Leclerc-Thibon の公式は, ρ に m の倍数以外の成分が含まれていれば $X^{(r^m)}_\rho(q)$ の $q=\zeta_m$ における値が 0 になることをいっている. そして ρ の成分が m の倍数のみからなるとき, $X^{(r^m)}_\rho(\zeta_m)$ を $Q^\mu_\rho(\zeta_m)$ になおすと, 常に先頭の符号が消え, 我々の Proposition 13 を得る.

[7] この表によれば $Q^{(2,2,2)}_{(3,1,1,1)}(q)=(1-q^2)(1+q-q^2)$ とあるが, これは $(1-q^2)(1+q+q^2)$ が正しい.

5 補足

5.1 R_μ のその後

この研究集会での発表後にも少々議論が進んだ. また, この一連の計算にまつわる情報も入ってきたので, それらについて最後にまとめておきたい.

我々の問題は端的にいえば, $\mu \vdash n$ に対し R_μ の次元の一致を表現論の言葉を使って解釈することである. 発表の時点では, 余不変式環の場合 ($\mu = (1^n)$ の場合) [MN1], および μ は hook の場合は, 全ての $l = (1,)2, \ldots, M_\mu$ に対して, その次元の一致の表現論的解釈を与える事ができているが, rectangle $\mu = (r^m)$ の場合には, m は素数 p という条件が必要であり, かつ $l = p$ のときのみに表現論的解釈を得ているのみであった [Mt]. この場合の証明は, その本質的な部分を Lascoux-Leclerc-Thibon の公式 (Propositon 15) によっている. この場合の表現論的解釈は, Green 多項式の 1 の冪根での値 $Q_\rho^{(r^p)}(\zeta_p^j)$ を調べることと同値である. LLT の公式は Green 多項式 $Q_\rho^{(r^m)}(q)$ の $q = \zeta_m$ での挙動を記述するものであり, 一般の $q = \zeta_m^j$ での値に関するものではない. このような一般の場合には, μ の重複度と ζ_m^j の位数がずれてしまい, R_μ の次元の一致の表現論的解釈を得るには, LLT の公式では足りなくなってしまう. しかし, 重複度が素数 p の場合は, ζ_p^j $(1 \leq j \leq p-1)$ の位数は常に p なので, LLT の公式で事足りるのである. これが rectangle の場合にその重複度が素数であることを求める理由であった.

現在ではこの難点が克服され, 一般の rectangle $\mu = (r^m)$ の場合に結果を得ている. この場合, 法を取る数は $l = m$ (およびその約数) で考えているが, 実のところこれも再び LLT のある公式によるところが大きい. 実際には, この場合に限っていえばより一般の μ に対して, 現在結果を手にしているので, それについて少し述べておくことにしたい. 正整数 m に対して, その重複度 m_i が全て m で割り切れる分割 $\mu = (1^{m_1}2^{m_2}\cdots n^{m_n}) \vdash n$ を, ここでは m-分割とよぶことにする[8]. μ を m-分割としたときに, 当然 $m \leq M_\mu$ でるので, R_μ は m に関して次元が一致し, 現在その表現論的解釈が得られている [MN2]. これは, l として一般には M_μ の約数をとった場合に対応していることに注意する. 一般重複度の rectangle $\mu = (r^m)$ で $l = m$ (あるいはその約数) のときも, まさにこの場合に含まれているが容易にわかる. さて, その表現論的解釈の背景となるのが, Green 多項式 $Q_\rho^\mu(q)$ の $q = \zeta_m$ における挙動に関する次の式である. ここでは細かい記号の説明は省き, おおよその雰囲気を伝えるに留める. (記号等は [MN2] に詳しくありますが, 現在準備中です.)

- $Q_\rho^\mu(\zeta_m) \neq 0 \Longrightarrow \rho = m\kappa, \quad \kappa \vdash \mu^{1/m}$,
- $\rho = m\kappa, \kappa \vdash \mu^{1/m}$ のとき, $Q_\rho^\mu(\zeta_m) = \left(\sum_{\substack{\tau \vdash \mu^{1/m}, \\ \rho_\tau = \rho}} m_\tau \right) m^{l(\rho)}$.

[8] Lascoux-Lecler-Thibon の表記を用いれば, これは $\mu = \nu^k$ という形に表される分割のことである [LLT].

先ほど言った LLT の「ある公式」とは以下のものである [DLT]. ここで主張されていることをより精密にもう少し先まで計算し, その上で Q に書き換えれば上の式が得られ, m-分割の場合の次元の一致の表現論的解釈が, $l=m$ (およびその約数) の場合に得られる.

Proposition 16 (Lascoux-Leclerc-Thibon) m は正整数とし, $\mu \vdash n$ は m-分割とする. このとき次が成り立つ:

- $X^{\mu}_{\rho}(\zeta_m) \neq 0 \Longrightarrow \rho = m\kappa, \quad \kappa \vdash \dfrac{n}{m}$,
- $\kappa \vdash \frac{n}{m}$ に対して, $X^{\mu}_{m\kappa}(\zeta_m) = (-1)^{(k-1)n/m} m^{l(\kappa)} \langle p_\kappa, h_{\mu^{1/m}} \rangle$.

以上, m-分割で $l|m$ の場合, R_μ の l に関する次元の一致の表現論的解釈は, その多くは Lascoux-Leclerc-Thibon の公式の語るところであった. 従って我々の一連の計算は, l $(1 \leq l \leq M_\mu)$ で M_μ を割ったときに余りがでる場合に, ことを一般化したことになる.

5.2 他の鏡映群〜正則数・非正則数

以上に述べてきた次元の一致の表現論的解釈の問題は, 導入でも述べたように, 一般の有限鏡映群に対しても想定しうる問題である. ただし, その場合どのような次数表現を考えるかが問題となるが, 当面は余不変式環を考えていくことになる. こちらの方面では, Springer [Sp], Kraśkiewicz-Weyman [KW], Stembridge [St] らによって, 有限複素鏡映群の余不変式環の次元の一致が, l が正則数の場合に調べられており, その表現論的解釈が得られている. その後, 最近になって Bonnafé [B, Theorem A] により l が非正則数の場合にも, 次元の一致の表現論的解釈が与えられた.

一方, 任意の体上の議論への一般化も Reiner-Stanton-Webb [RSW] によって進められている. k を一般の体とし, V を k 上の n 次元線形空間とする. また, W を V 上の有限 (擬) 鏡映群とし, S_W でその余不変式環を表すことにする. いま, W の鏡映超平面全体の集合を $\mathcal{H}$ で表すことにし, $\cup_{H\in\mathcal{H}} H$ に含まれない V の元を「正則元」とよぶことにする. このとき, 非単位元 $w \in W$ が W の「正則元」であるとは, 正則な固有ベクトルを持つこととして定義する[9]. またその位数を W の「正則数」とよぶことにする. 例えば n 次対称群の正則数は $n-1$ および n の約数 (>1) たちのことである [Sp]. Reiner-Stanton-Webb による一般化とは, W の余不変式環 R_W と群環 $k[W]$ の $W \times C_l$-加群としての組成列の一致をいうものである. ここで C_l は位数が l の正則元 a で生成される巡回群であり, R_W や $k[W]$ の C_l-加群の構造はそれぞれ

$$a.x = \zeta_l^d x, \quad x \in R_W^d$$
$$a.w = wa^{-1}, \quad w \in W$$

[9]正確には係数体 k の代数閉包上で全てを考える.

で入れている. ただし, R_W^d は余不変式環 R_W の斉 d 次空間. Kraśkiewicz-Weyman あるいは Stembridge あるいは Springer らの結果は余不変式環 R_W と群環 $\mathbf{C}[W]$ の $W \times C_l$-加群同型を与えることになるので, Reiner-Stanton-Webb の結果がその一般化を与えていることは容易に納得できる.

参考文献

[B] C. Bonnafé, A note on the coinvariant algebra of a finite reflection group, preprint, 2004.

[DLT] . Désarménien, B. Leclerc and J. -Y. Thibon, Hall-Littlewood functions and Kostka-Foulkes polynomials in representation theory, Seminaire Lotharingien de Combinatoire, B32c (1994), 38 pp.

[DP] C. DeConcini and C. Procesi, Symmetric functions, conjugacy classes, and the flag variety, *Inv. Math.* **64** (1981), 203-230.

[GP] A. M. Garsia and C. Procesi, On certain graded S_n-modules and the q-Kostka polynomials, *Adv. Math.* **94** (1992), 82-138.

[G] A. M. Garsia, Combinatorics of the free Lie algebra and the symmetric group, in *Analysis, et cetera..., Jürgen Moser Festschrift.* Academic Press, New York, 1990, pp. 309–382.

[Gr] J. A. Green, The character of the finite general linear groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **80** (1955), 402-447.

[H] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge studies in advanced mathematics **29**, Cambridge University Press, 1990.

[KW] W. Kraśkiewicz and J. Weyman, Algebra of coinvariants and the action of Coxeter elements, *Bayreuth. Math. Schr.* **63** (2001), 265–284.

[LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J. -Y. Thibon, Green polynomials and Hall-Littlewood functions at roots of unity, *Euro. J. Comb.* **15** (1994), 173-180.

[Mt] H. Morita, Decomposition of Green polynomials of type A and DeConcini-Procesi-Tanisaki algebras of certain types, submitted.

[Mc] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford University Press, 1995.

[Mr] A. O. Morris, The characters of the group $GL(n, q)$, *Math. Z.* **1** (1963), 112-123.

[MN1] H. Morita and T. Nakajima, The coinvariant algebra of the symmetric group as a direct sum of induced modules, to appear in *Osaka J. Math.*

[MN2] H. Morita and T. Nakajima, Computing exact values of Green polynomials at roots of unity, in preparation.

[RSW] V. Reiner, D. Stanton and P. Webb, Springer's regular elements over arbitrary fields, preprint, 2004.

[Sp] T. A. Springer, Regular elements of finite reflection groups, *Invent. Math.* **25** (1974), 159–198.

[St] J. R. Stembridge, On the eigenvalues of representations of reflection groups and wreath products, *Pacific J. Math.* **140** (1989), 359–396.

[S1] T. Shoji, Green functions associated to complex reflection groups, J. Algebra. 245, (2001), 650 - 694.

[S2] T. Shoji, Green functions associated to complex reflection groups II, J. Algebra 258, (2002), 563 - 598.

[T] T. Tanisaki, Defining ideals of the closures of conjugacy classes and representations of the Weyl groups, *Tohoku J. Math.* **34** (1982), 575-585.